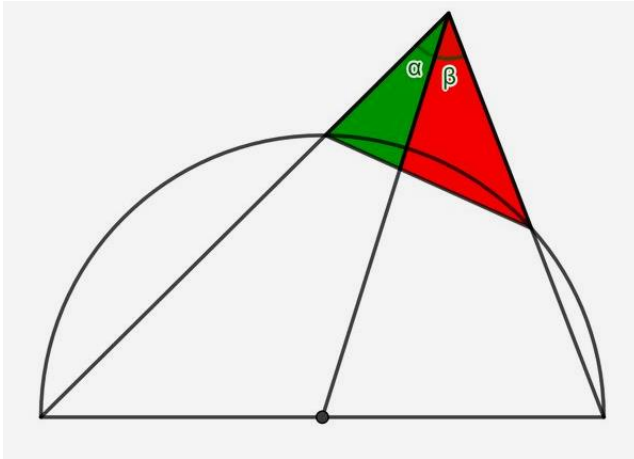


Egy érdekes síkgeometriai feladat – 1. rész

Az interneten találkoztunk az alábbi feladattal és vázlatos megoldásával.

A feladat

Adott az 1. ábra szerinti alakzat.

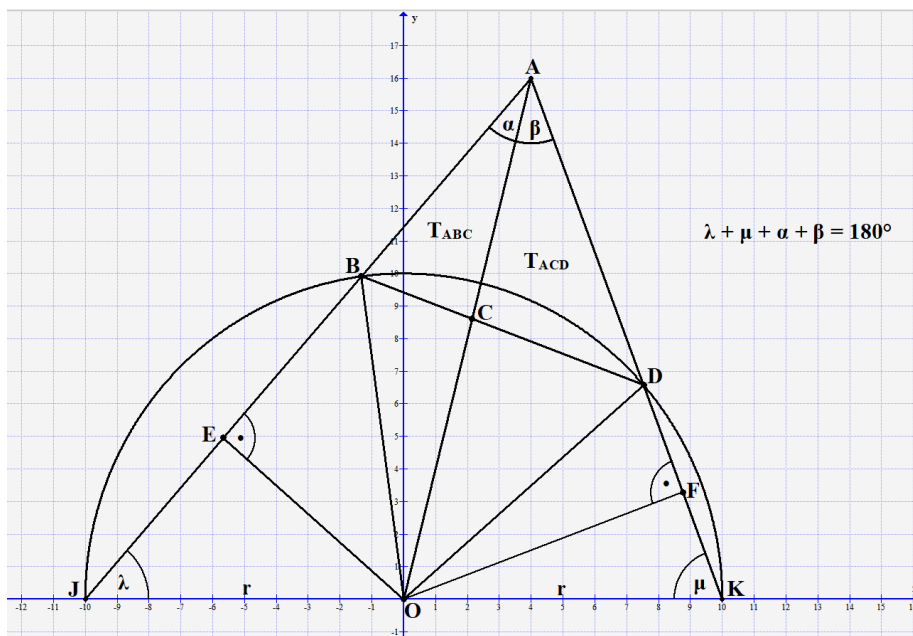


1. ábra – forrása: [1]

Határozzuk meg a zöld és a piros háromszögek területének arányát!

A megoldás

Ehhez tekintsük a 2. ábrát!



2. ábra

A két háromszög területe:

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \alpha, \quad T_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \beta. \quad (1)$$

A két háromszög területének aránya:

$$\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \beta} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \text{tehát:}$$

$$\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (2)$$

Látjuk, hogy a közvetlen feladat az $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$ arány kiszámítása.

Ehhez először kétszer alkalmazzuk a *koszinusztételt*; a 2. ábra alapján:

$$r^2 = \overline{AJ}^2 + \overline{AO}^2 - 2 \cdot \overline{AJ} \cdot \overline{AO} \cdot \cos \alpha; \quad (3/1)$$

$$r^2 = \overline{AK}^2 + \overline{AO}^2 - 2 \cdot \overline{AK} \cdot \overline{AO} \cdot \cos \beta. \quad (3/2)$$

A (3) egyenletekből:

$$\begin{aligned} \overline{AJ}^2 + \overline{AO}^2 - 2 \cdot \overline{AJ} \cdot \overline{AO} \cdot \cos \alpha &= \overline{AK}^2 + \overline{AO}^2 - 2 \cdot \overline{AK} \cdot \overline{AO} \cdot \cos \beta \rightarrow \\ \overline{AJ}^2 - 2 \cdot \overline{AJ} \cdot \overline{AO} \cdot \cos \alpha &= \overline{AK}^2 - 2 \cdot \overline{AK} \cdot \overline{AO} \cdot \cos \beta \rightarrow \\ \overline{AJ} \cdot (\overline{AJ} - 2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \alpha) &= \overline{AK} \cdot (\overline{AK} - 2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \beta) \rightarrow \\ \frac{\overline{AK}}{\overline{AJ}} &= \frac{\overline{AJ} - 2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \alpha}{\overline{AK} - 2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \beta} = \frac{2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \alpha - \overline{AJ}}{2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \beta - \overline{AK}}, \quad \text{tehát:} \\ \frac{\overline{AK}}{\overline{AJ}} &= \frac{2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \alpha - \overline{AJ}}{2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \beta - \overline{AK}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Ezután a (4) egyenlet bal oldalához a *szinusztétel* kétszeri alkalmazásával:

$$\frac{r}{\overline{AJ}} = \frac{\sin \alpha}{\sin[180^\circ - (\lambda + \alpha)]} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\lambda + \alpha)}; \quad (5)$$

$$\frac{r}{\overline{AK}} = \frac{\sin \beta}{\sin[180^\circ - (\mu + \beta)]} = \frac{\sin \beta}{\sin(\mu + \beta)}; \quad (6)$$

utóbb felhasználtuk a

$$\lambda + \mu + \alpha + \beta = 180^\circ \quad (7)$$

összefüggést is. Most (5) és (6) hányadosát képezve:

$$\frac{\frac{r}{\overline{AJ}}}{\frac{r}{\overline{AK}}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\sin(\lambda + \alpha)}}{\frac{\sin \beta}{\sin(\mu + \beta)}} \rightarrow \frac{\overline{AK}}{\overline{AJ}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (8)$$

Majd a (4) egyenlet jobb oldalához:

$$\overline{AO} \cdot \cos \alpha = \overline{AJ} - \overline{EJ} = \overline{AJ} - \frac{\overline{BJ}}{2} \rightarrow 2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \overline{AJ} - \overline{BJ}, \text{ innen:}$$

$$2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \alpha - \overline{AJ} = 2 \cdot \overline{AJ} - \overline{BJ} - \overline{AJ} = \overline{AJ} - \overline{BJ} = \overline{AB},$$

tehát:

$$2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \alpha - \overline{AJ} = \overline{AB}. \quad (9)$$

Hasonlóképpen:

$$\overline{AO} \cdot \cos \beta = \overline{AK} - \overline{FK} = \overline{AK} - \frac{\overline{DK}}{2} \rightarrow 2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \beta = 2 \cdot \overline{AK} - \overline{DK}, \text{ innen:}$$

$$2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \beta - \overline{AK} = 2 \cdot \overline{AK} - \overline{DK} - \overline{AK} = \overline{AK} - \overline{DK} = \overline{AD},$$

tehát:

$$2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \beta - \overline{AK} = \overline{AD}. \quad (10)$$

Most (4), (8), (9) és (10) - zel:

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AJ}} = \frac{2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \alpha - \overline{AJ}}{2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \beta - \overline{AK}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}. \quad (11)$$

Majd (2) és (11) - gyel:

$$\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta},$$

tehát:

$$\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta}, \quad (12)$$

egyezésben az [1] - ben talált megoldás eredményével.

Megjegyzések:

M1. Itteni megoldásunk nem pont az [1] szerinti. Az ottani megoldás rövidebb, ámde nehezebben követhető. Nem igazán szeretjük a csak vázolt megoldásokat. Persze, dolgozni kellene vele. Az olyan „ciki”, meg izzadságszagú. Főképpen nem „elegáns”. (Jó, mi?)

M2. Az itt felhasznált összefüggések mind a középiskolai matek - tananyag részei, melyek kötelezően előjönnek az érettségire való felkészítés során.

M3. Szerintünk ez egy jó feladat; érdemes benne elmélyedni.

M4. A fentiek szerint, (11) -ből:

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AJ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \rightarrow \underline{\overline{AB} \cdot \overline{AJ} = \overline{AD} \cdot \overline{AK}}, \quad (13)$$

ami a *szelőtétel* – ld. pl.: [2]! – következménye.

E téma tanulmányozásához ajánlható [3] is. Ezt középiskolásoknak és tanáraiknak írták. (Nem rémlik, hogy annak idején a középiskolában tanultuk volna a szelőtételt.)

M5. A 2. ábráról eszünkbe jutott a következő feladat.

Adott: r, λ, μ .

Keresett: α, β .

A 2. ábráról leolvasható, hogy az r, λ, μ adatokkal – előmetszéssel – előáll az **A** pont, majd az **AO** egyenes a **JKA** háromszög **A** - nál lévő szögét felosztja α - ra és β - ra.

Ezek számítása az alábbiak szerint is alakulhat.

A 2. ábra alapján:

$$\overline{OE} = \overline{AO} \cdot \sin \alpha = r \cdot \sin \lambda, \quad (14)$$

$$\overline{OF} = \overline{AO} \cdot \sin \beta = r \cdot \sin \mu. \quad (15)$$

A (14) és (15) egyenletek hányadosát képezve:

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{AO} \cdot \sin \alpha}{\overline{AO} \cdot \sin \beta} = \frac{r \cdot \sin \lambda}{r \cdot \sin \mu} \rightarrow \underline{\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \lambda}{\sin \mu}}. \quad (16)$$

Megint a 2. ábra alapján:

$$\overline{AE} = \overline{AO} \cdot \cos \alpha = \overline{AJ} - r \cdot \cos \lambda; \quad (17)$$

$$\overline{AF} = \overline{AO} \cdot \cos \beta = \overline{AK} - r \cdot \cos \mu. \quad (18)$$

A (17) és (18) egyenletek hányadosát képezve:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AO} \cdot \cos \alpha}{\overline{AO} \cdot \cos \beta} = \frac{\overline{AJ} - r \cdot \cos \lambda}{\overline{AK} - r \cdot \cos \mu} \rightarrow \underline{\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{\overline{AJ} - r \cdot \cos \lambda}{\overline{AK} - r \cdot \cos \mu}}. \quad (19)$$

Ezután szinusztétellel, (7) - tel is:

$$\frac{\overline{AJ}}{2 \cdot r} = \frac{\sin \mu}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin \mu}{\sin[180^\circ-(\lambda+\mu)]} = \frac{\sin \mu}{\sin(\lambda+\mu)} \rightarrow \overline{AJ} = 2 \cdot r \cdot \frac{\sin \mu}{\sin(\lambda+\mu)}; \quad (20)$$

$$\frac{\overline{AK}}{2 \cdot r} = \frac{\sin \lambda}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin \lambda}{\sin[180^\circ-(\lambda+\mu)]} = \frac{\sin \lambda}{\sin(\lambda+\mu)} \rightarrow \overline{AK} = 2 \cdot r \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin(\lambda+\mu)}. \quad (21)$$

Most (19), (20) és (21) - gyel:

$$\begin{aligned}\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} &= \frac{2 \cdot r \cdot \frac{\sin \mu}{\sin(\lambda+\mu)} - r \cdot \cos \lambda}{2 \cdot r \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin(\lambda+\mu)} - r \cdot \cos \mu} = \frac{2 \cdot \frac{\sin \mu}{\sin(\lambda+\mu)} - \cos \lambda}{2 \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin(\lambda+\mu)} - \cos \mu} = \frac{2 \cdot \sin \mu - \cos \lambda \cdot \sin(\lambda+\mu)}{2 \cdot \sin \lambda - \cos \mu \cdot \sin(\lambda+\mu)} \rightarrow \\ \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} &= \frac{2 \cdot \sin \mu - \cos \lambda \cdot \sin(\lambda+\mu)}{2 \cdot \sin \lambda - \cos \mu \cdot \sin(\lambda+\mu)} \equiv \frac{S}{N} .\end{aligned}\quad (22)$$

A már látott

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\lambda + \mu) \quad (23)$$

egyenlet bal oldalát kifejtve:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \sin(\lambda + \mu) ; \quad (24)$$

most (16) - ből:

$$\sin \alpha = \sin \beta \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin \mu} ; \quad (25)$$

majd (22) - ből:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{S}{N} \rightarrow \cos \alpha = \cos \beta \cdot \frac{S}{N} ; \quad (26)$$

ezután (24), (25) és (26) - tal:

$$\begin{aligned}\sin \beta \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin \mu} \cdot \cos \beta + \cos \beta \cdot \frac{S}{N} \cdot \sin \beta &= \sin(\lambda + \mu) \rightarrow \\ \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \left(\frac{\sin \lambda}{\sin \mu} + \frac{S}{N} \right) &= \sin(\lambda + \mu) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sin(2 \cdot \beta) = \frac{\sin(\lambda + \mu)}{\left(\frac{\sin \lambda}{\sin \mu} + \frac{S}{N} \right)} \rightarrow \\ \sin(2 \cdot \beta) &= 2 \cdot \frac{\sin(\lambda + \mu)}{\frac{\sin \lambda}{\sin \mu} + \frac{S}{N}} \rightarrow 2 \cdot \beta = \arcsin \left[2 \cdot \frac{\sin(\lambda + \mu)}{\frac{\sin \lambda}{\sin \mu} + \frac{S}{N}} \right] \rightarrow \\ \beta(\lambda, \mu) &= \frac{1}{2} \cdot \arcsin \left[2 \cdot \frac{\sin(\lambda + \mu)}{\frac{\sin \lambda}{\sin \mu} + \frac{2 \cdot \sin \mu - \cos \lambda \cdot \sin(\lambda + \mu)}{2 \cdot \sin \lambda - \cos \mu \cdot \sin(\lambda + \mu)}} \right] .\end{aligned}\quad (27)$$

Majd (7) - ből:

$$\alpha(\lambda, \mu) = 180^\circ - [\lambda + \mu + \beta(\lambda, \mu)] . \quad (28)$$

Ezzel kitűzött feladatunkat megoldottuk.

Látjuk, hogy az α , β szögek nem függnak r - től , csak λ és μ - től.

További fejlemény, hogy (12) és (16) miatt:

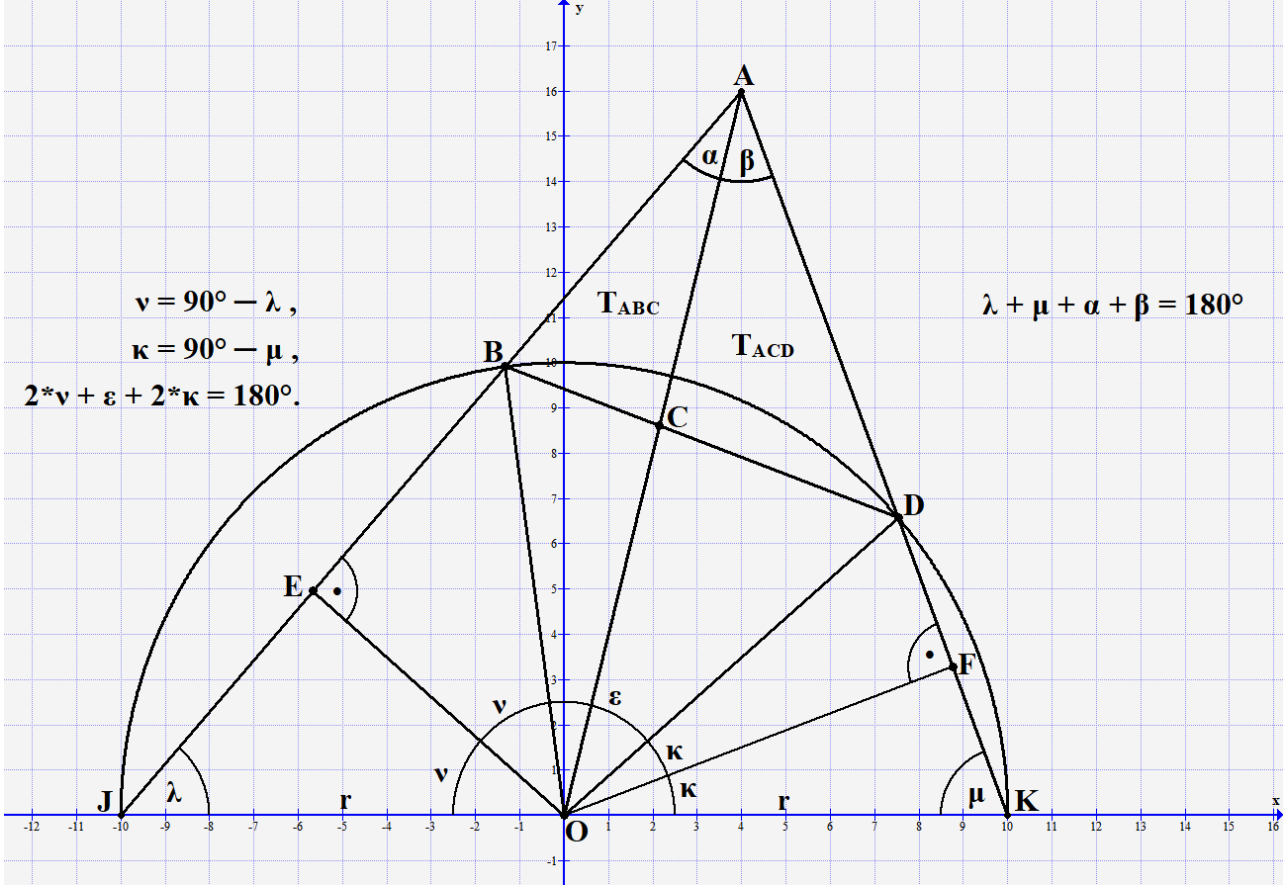
$$\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = \frac{\sin^2 \lambda}{\sin^2 \mu} . \quad (29)$$

M6. A 2. ábráról eszünkbe jutott még az alábbi feladat is.

Adott: r, λ, μ .

Keresett: T_{ABD} .

A megoldáshoz tekintsük a 3. ábrát is!



3. ábra

Eszerint:

$$T_{ABD} = T_{AJK} - (T_{OBJ} + T_{OBD} + T_{ODK}) . \quad (30)$$

A kiírt területek a 3. ábra szerint és a korábbi eredményekkel az alábbiak.

$$T_{AJK} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AJ} \cdot (2 \cdot r \cdot \sin \lambda) = \frac{1}{2} \cdot \left[2 \cdot r \cdot \frac{\sin \mu}{\sin(\lambda + \mu)} \right] \cdot (2 \cdot r \cdot \sin \lambda) = 2 \cdot r^2 \cdot \frac{\sin \lambda \cdot \sin \mu}{\sin(\lambda + \mu)} ,$$

$$\underline{T_{AJK} = 2 \cdot r^2 \cdot \frac{\sin \lambda \cdot \sin \mu}{\sin(\lambda + \mu)} .} \quad (31)$$

Most:

$$T_{OBJ} = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot r \cdot \cos \lambda) \cdot (r \cdot \sin \lambda) = \frac{r^2}{2} \cdot (2 \cdot \sin \lambda \cdot \cos \lambda) = \frac{r^2}{2} \cdot \sin(2 \cdot \lambda) ,$$

$$\underline{T_{OBJ} = \frac{r^2}{2} \cdot \sin(2 \cdot \lambda) .} \quad (32)$$

Majd:

$$T_{OBD} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (r \cdot \sin \varepsilon) = \frac{r^2}{2} \cdot \sin \varepsilon . \quad (33)$$

Ámde a 3. ábra szerint:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 180^\circ - 2 \cdot (\nu + \kappa) = 180^\circ - 2 \cdot [(90^\circ - \lambda) + (90^\circ - \mu)] = \\ &= 180^\circ - 2 \cdot [180^\circ - (\lambda + \mu)] = 2 \cdot (\lambda + \mu) - 180^\circ , \text{ tehát:} \\ \varepsilon &= 2 \cdot (\lambda + \mu) - 180^\circ . \end{aligned} \quad (34)$$

Továbbá, (34) - gyel is:

$$\sin \varepsilon = \sin[2 \cdot (\lambda + \mu) - 180^\circ] = -\sin[2 \cdot (\lambda + \mu)] . \quad (35)$$

Most (33) és (35) - tel:

$$\underline{T_{OBD} = -\frac{r^2}{2} \cdot \sin[2 \cdot (\lambda + \mu)] .} \quad (36)$$

A (36) szerinti terület pozitív mennyiség, hiszen ε hegyesszög.

Majd:

$$\begin{aligned} T_{ODK} &= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot r \cdot \cos \mu) \cdot (r \cdot \sin \mu) = \frac{r^2}{2} \cdot \sin(2 \cdot \mu) , \text{ tehát:} \\ \underline{T_{ODK} &= \frac{r^2}{2} \cdot \sin(2 \cdot \mu) .} \end{aligned} \quad (37)$$

Ezután (30), (31), (32), (36) és (37) - tel:

$$\begin{aligned} T_{ABD} &= 2 \cdot r^2 \cdot \frac{\sin \lambda \cdot \sin \mu}{\sin(\lambda + \mu)} - \left\{ \frac{r^2}{2} \cdot \sin(2 \cdot \lambda) - \frac{r^2}{2} \cdot \sin[2 \cdot (\lambda + \mu)] + \frac{r^2}{2} \cdot \sin(2 \cdot \mu) \right\} , \\ \underline{\underline{T_{ABD} &= \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \left[4 \cdot \frac{\sin \lambda \cdot \sin \mu}{\sin(\lambda + \mu)} - \{ \sin(2 \cdot \lambda) - \sin[2 \cdot (\lambda + \mu)] + \sin(2 \cdot \mu) \} \right] .}} \end{aligned} \quad (38)$$

Ezzel kitűzött feladatunkat megoldottuk.

Látjuk, ide már kellett az r hosszúság - adat is.

M7. A (27) és (28) eredmények értékelésekor figyelembe kell venni, hogy a

$$\sin(\lambda + \mu) = \sin[180^\circ - (\lambda + \mu)] \quad (\%)$$

kapcsolat miatt két eredmény is adódik.

Vegyük például a

$$\mu = \lambda \quad (*)$$

speciális esetet! Ekkor (27) és (*) szerint:

$$\begin{aligned} \beta_1^* &= \frac{1}{2} \cdot \arcsin \left[2 \cdot \frac{\sin(\lambda+\lambda)}{\frac{\sin \lambda}{\sin \lambda} + \frac{2 \cdot \sin \lambda - \cos \lambda \cdot \sin(\lambda+\lambda)}{2 \cdot \sin \lambda - \cos \lambda \cdot \sin(\lambda+\lambda)}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \arcsin \left[2 \cdot \frac{\sin(2 \cdot \lambda)}{\frac{\sin \lambda}{\sin \lambda} + \frac{2 \cdot \sin \lambda - \cos \lambda \cdot \sin(2 \cdot \lambda)}{2 \cdot \sin \lambda - \cos \lambda \cdot \sin(2 \cdot \lambda)}} \right] = \frac{1}{2} \cdot \arcsin \left[2 \cdot \frac{\sin(2 \cdot \lambda)}{1+1} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \arcsin[\sin(2 \cdot \lambda)] = \frac{2 \cdot \lambda}{2} = \lambda, \end{aligned}$$

ami általában nem a helyes eredmény. A helyes eredmény ekkor:

$$\beta_2^* = \alpha^* = 90^\circ - \lambda, \quad (!)$$

ami a (%) összefüggés felhasználásával kapható meg.

M8. Jelen dolgozatunk címében egy feladatról van szó. Ezzel szemben itt vagy hármat is megoldottunk. Ez rendszerint így megy: az egyik dolog hozza a másikat.

M9. Most a képletek alkalmazására megoldunk egy számpéldát. Ez a 2. ábra esete lesz.

Határozzuk meg a 2. ábráról levehető adatokkal a β , α , $\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}}$ eredményeket, számítással!

Adatok:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \lambda &= \frac{16}{14} = \frac{8}{7} \rightarrow \lambda = \operatorname{arctg} \left(\frac{8}{7} \right) = 48,81407483^\circ, \\ \operatorname{tg} \mu &= \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \rightarrow \mu = \operatorname{arctg} \left(\frac{8}{3} \right) = 69,44395478^\circ. \end{aligned} \quad (A)$$

Először (27) és (28) - cal kiszámítjuk a β és az α szögeket:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} \cdot \arcsin \left[2 \cdot \frac{\sin(48,81407483^\circ + 69,44395478^\circ)}{\frac{\sin 48,81407483^\circ}{\sin 69,44395478^\circ} + \frac{2 \cdot \sin 69,44395478^\circ - \cos 48,81407483^\circ \cdot \sin(48,81407483^\circ + 69,44395478^\circ)}{2 \cdot \sin 48,81407483^\circ - \cos 69,44395478^\circ \cdot \sin(48,81407483^\circ + 69,44395478^\circ)}} \right], \\ \beta &= 34,5922887^\circ \approx 34,6^\circ. \end{aligned} \quad (a)$$

Majd:

$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ - (48,81407483^\circ + 69,44395478^\circ + 34,5922887^\circ) = \\ &= 27,14968169^\circ \approx 27,1^\circ, \\ \alpha &= 27,14968169^\circ \approx 27,1^\circ. \end{aligned} \quad (b)$$

Az (a) és (b) eredmények jól egyeznek a 2. ábráról lemérhető szögekkel.

Most (12) és (a), (b) - vel:

$$\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = \frac{\sin^2 27,14968169^\circ}{\sin^2 34,5922887^\circ} = 0,6460176984, \text{ tehát:}$$

$$\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = 0,6460176984. \quad (c / 1)$$

Ugyanez (29) - cel és (A) - val, ellenőrzésképpen:

$$\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = \frac{\sin^2 48,81407483^\circ}{\sin^2 69,44395478^\circ} = 0,646017699, \text{ tehát:}$$

$$\frac{T_{ABC}}{T_{ACD}} = 0,646017699. \quad (c / 2)$$

A (c / 1) és (c / 2) eredmények megnyugtatóan egyeznek.

Megemlítjük, hogy az (a) eredményt a zsebszámológéppel csak több lépésben lehetett kiszámolni.

M10. Javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó gyakorolja a számítógép képernyőjén megjelenő ábráról való adatlevételt! Most éppen a 2. ábra szögeinek lemérését.

Források:

[1] – <https://mirangu.com/through-the-roof/#more-10233>

[2] – **Reiman István:** A geometria és határterületei
Gondolat Könyvkiadó, Budapest, 1986.

[3] – **Göndör András:** Nagy tételkönyv, 1. kötet
Scolar Kiadó, Budapest, 2005.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2024. 01. 21.

Továbbiak: www.galgoczi.net